

Le templex et les sciences du climat

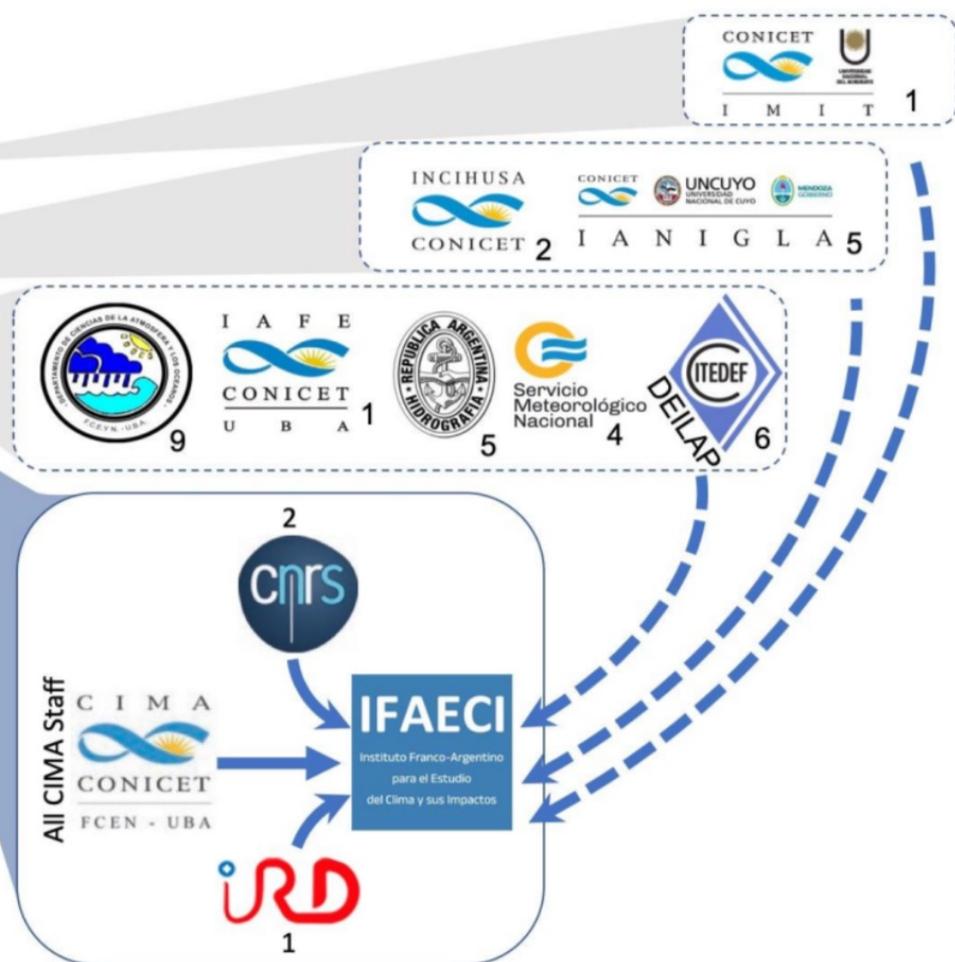
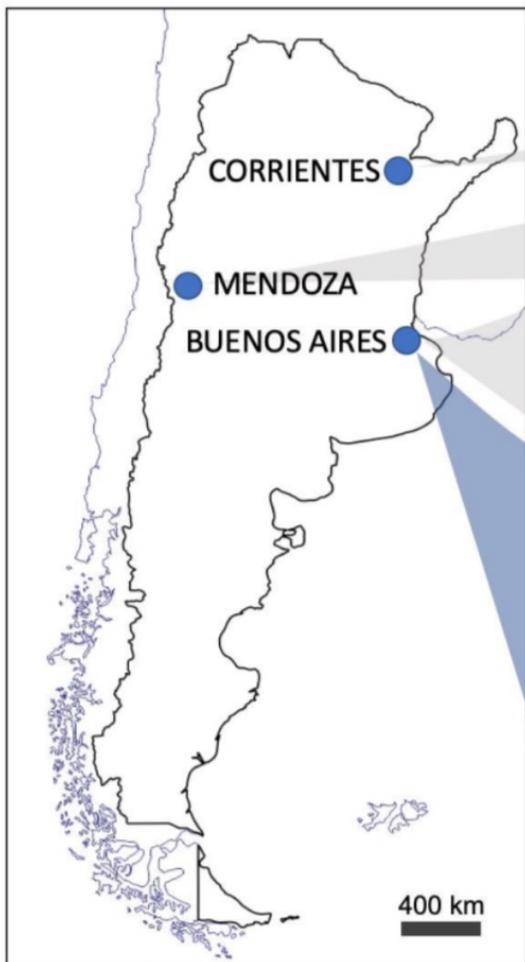
D. Sciamarella (IFAECI-CNRS)



En collaboration avec Gisela D. Charó, C. Mosto (IFAECI-Buenos Aires), Michael Ghil (ENS-Paris), Florian Sévellec (LOPS-Brest), Christophe Letellier (CORIA-Rouen) et al.

Institut Franco-Argentin d'Etudes sur le Climat et ses Impacts

INSTITUT FRANCO-ARGENTIN D'ÉTUDES SUR LE CLIMAT ET SES IMPACTS
 INSTITUTO FRANCO-ARGENTINO DE ESTUDIOS SOBRE EL CLIMA Y SUS IMPACTOS



Institut Franco-Argentin d'Etudes sur le Climat et ses Impacts

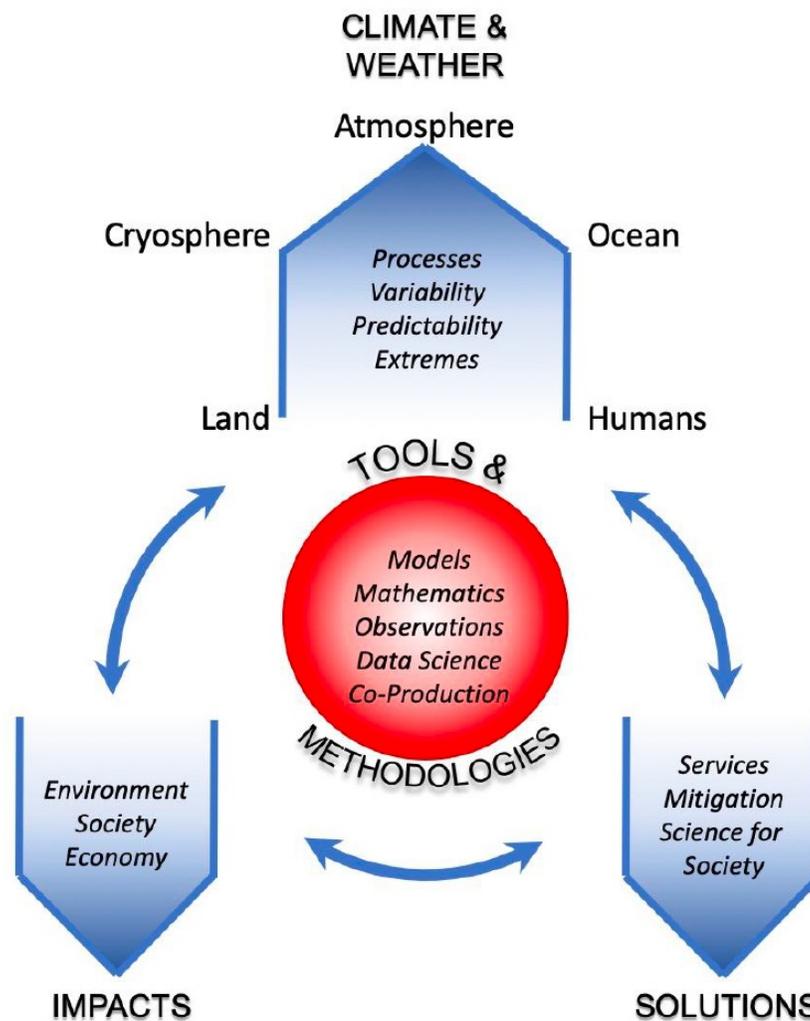
 ifaeci.cnrs.fr

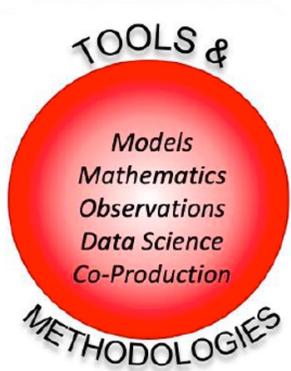
 ifaeci.cima.fcen.uba.ar

IRL 3351 (CNRS)
UMI 262 (IRD)

~ 210 personnes dont
73 permanents
(2 chercheurs CNRS, 1 délégation IRD)
63 doctorants
67 étudiants de "licenciatura"
7 étudiants de maîtrise
+ stagiaires (Ecole Polytechnique)

Hub regional en
Sciences du Climat
pour l'Amérique du
Sud





La **topologie** comme **outil théorique** et d'analyse des données pour comprendre les **processus fondamentaux** qui sous-tendent la dynamique des systèmes complexes.

À paraître bientôt :

<https://doi.org/10.5194/egusphere-2023-216>
Preprint. Discussion started: 15 February 2023
© Author(s) 2023. CC BY 4.0 License.



Review Article: Dynamical Systems, Algebraic Topology, and the Climate Sciences

Michael Ghil^{1,2} and Denisse Sciamarella³

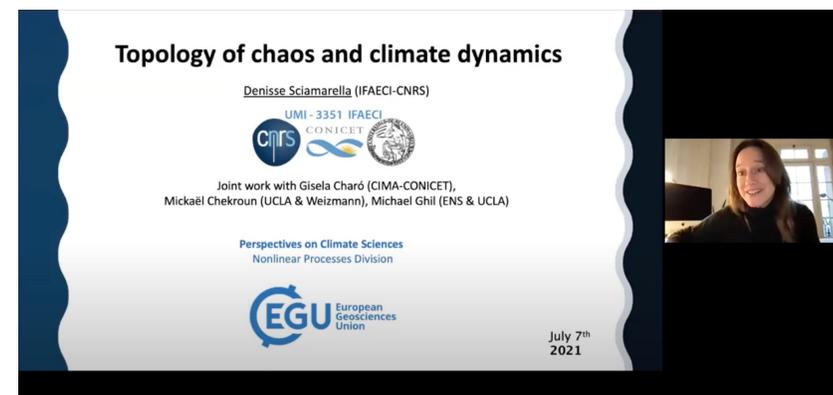
¹Geosciences Department and Laboratoire de Météorologie Dynamique (CNRS and IPSL), École Normale Supérieure and PSL University, 75231 Paris Cedex 05, France

²Department of Atmospheric & Oceanic Sciences, University of California at Los Angeles, Los Angeles, CA 90095-1567, USA

³Institut Franco-Argentin d'Études sur le Climat et ses Impacts (IFAECI) International Research Laboratory 3351 (CNRS - IRD - CONICET - UBA) C1428EGA CABA, Argentina

Cet article est basé sur les conférences invitées faites par les deux auteurs dans le cadre d'une série en ligne intitulée "**Perspectives sur les sciences du climat : Des développements historiques aux frontières de la recherche**".

Son succès a conduit à l'idée d'un numéro spécial de *Nonlinear Processes in Geophysics* (Processus non linéaires en géophysique).



<https://youtu.be/W1yndTsvR0g>

La première phrase du roman **Anna Karénine** de Léon Tolstoï est la suivante :

"Toutes les familles heureuses se ressemblent, mais chaque famille malheureuse l'est à sa façon. "

À la suite du célèbre écrivain, Robert Gilmore et Marc Lefranc nous disent :

"Tous les systèmes linéaires se ressemblent ; chaque système non linéaire l'est à sa façon".

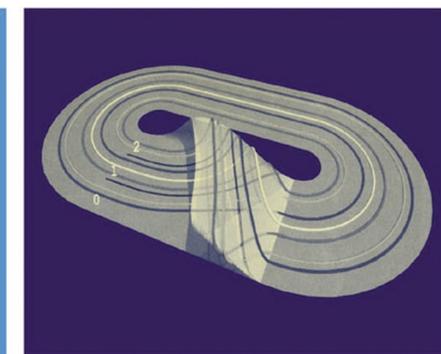


Robert Gilmore and Marc Lefranc

WILEY-VCH

The Topology of Chaos

Alice in Stretch and Squeezeland



“It was a very happy and shocking discovery that there were structures in nonlinear systems that are always the same if you looked at them the right way.”

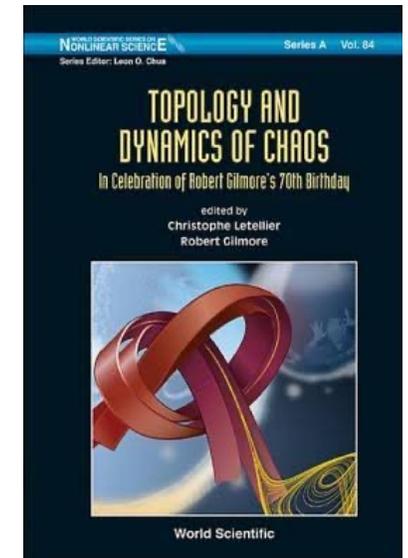
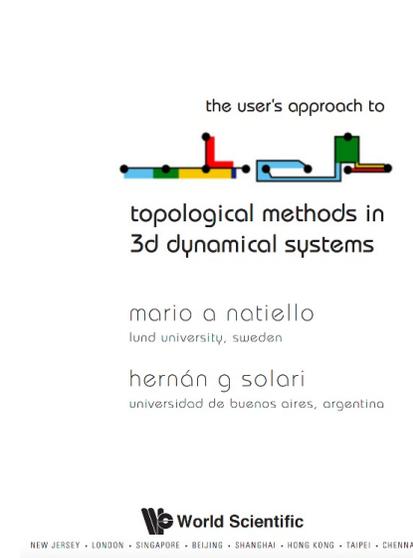
"Ce fut une découverte à la fois heureuse et choquante : il existe des structures dans les systèmes non linéaires qui sont toujours les mêmes si on les observe de la bonne manière.”

L'analyse topologique dans l'espace des phases est la 'bonne façon' d'étudier les systèmes dynamiques.

Plan de la présentation :

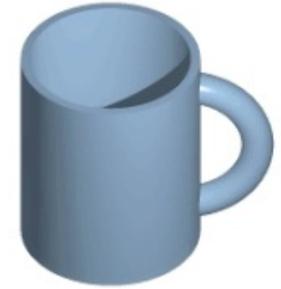
histoire de la naissance du templex

- I. Qu'est-ce que la topologie du chaos et pourquoi est-elle importante ?
- II. Comment dévoiler la structure topologique d'un flot?
- III. Application de la théorie des homologies à l'analyse lagrangienne
- IV. Les homologies sont-elles suffisantes pour décrire une structure topologique ?
- V. Le temps comme chaînon manquant : naissance du templex
- VI. Applications du templex à des systèmes dynamiques déterministes et stochastiques



Charó, G. D., Letellier, C., & Sciamarella, D. (2022). Templex: A bridge between homologies and templates for chaotic attractors. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(8), 083108.

I. Qu'est-ce que la topologie du chaos et pourquoi est-elle importante ?

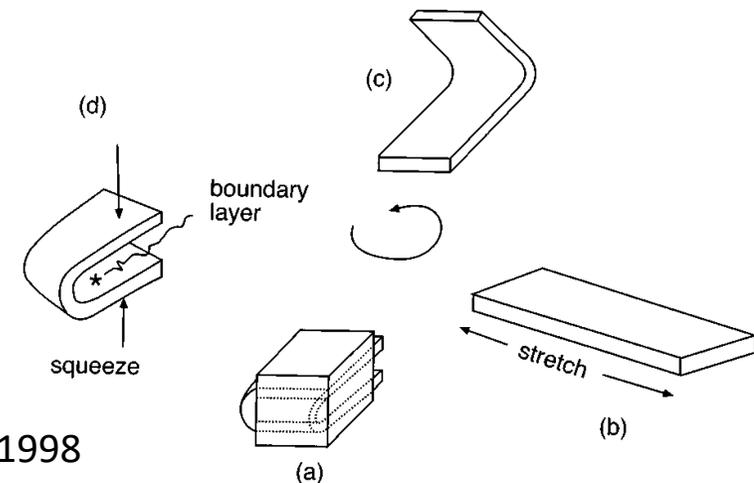


La topologie est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés d'objets géométriques préservées par déformation continue (sans arrachage ni recollement).

Les invariants dans l'espace des phases peuvent être de différents types :

- a) **Métriques** : dimensions de différents types, par exemple dimension de corrélation (Grassberger & Procaccia, 1983), fonctions d'échelle multifractale (Halsey et al., 1986)
- b) **Dynamiques** : exposants de Lyapunov (Oseledec, 1968 ; Wolf et al., 1985), tels que discutés par Eckmann & Ruelle (1985) et par Abarbanel et al. (1993).
- c) **Topologiques** : nombres de liaison, taux de rotation relatifs, polynômes de Conway, variétés ramifiées (Birman & Williams, 1983)

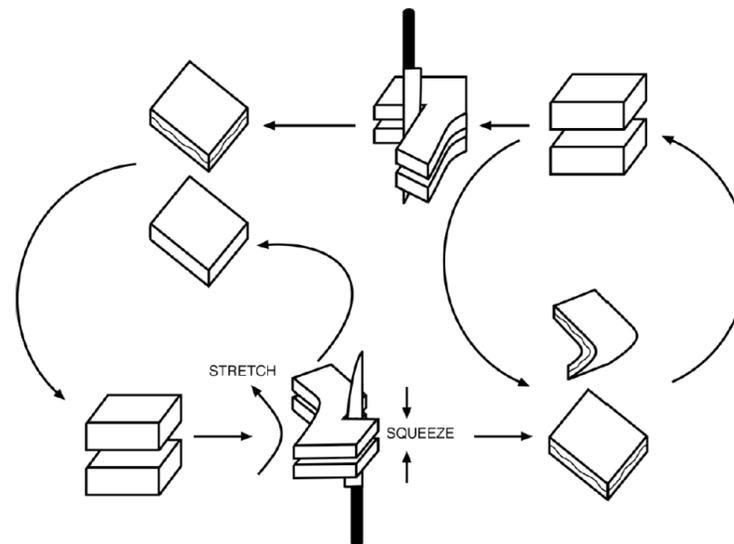
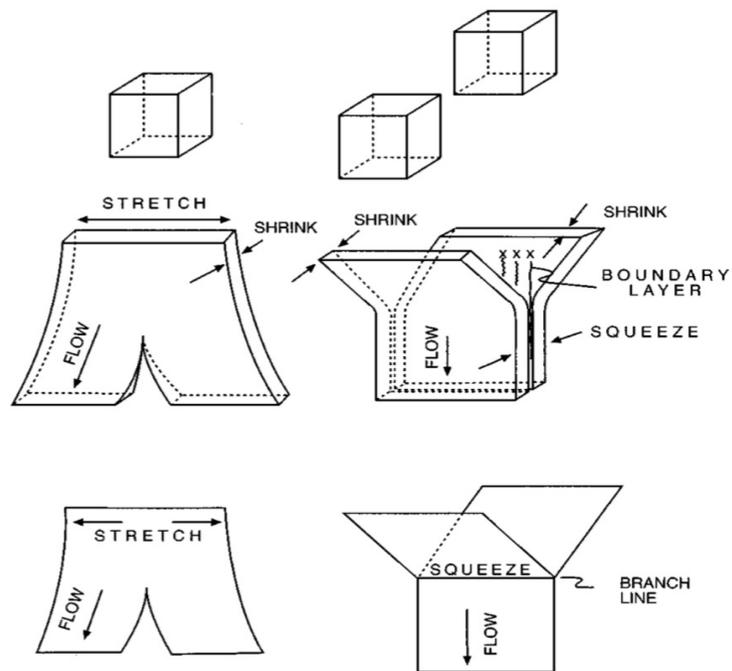
Mais les invariants (a) et (b) ne fournissent pas d'informations sur la façon de modéliser la dynamique du système!



R. Gilmore, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 70(4), October 1998

I. Qu'est-ce que la topologie du chaos et pourquoi est-elle importante ?

Considérons un cube de conditions initiales soumis à un flot. Il peut être étiré de manière à se diviser en deux parties se dirigeant vers différentes régions de l'espace des phases ; il peut se rétrécir pour former une structure localement bidimensionnelle. Deux cubes peuvent également être serrés l'un contre l'autre ...



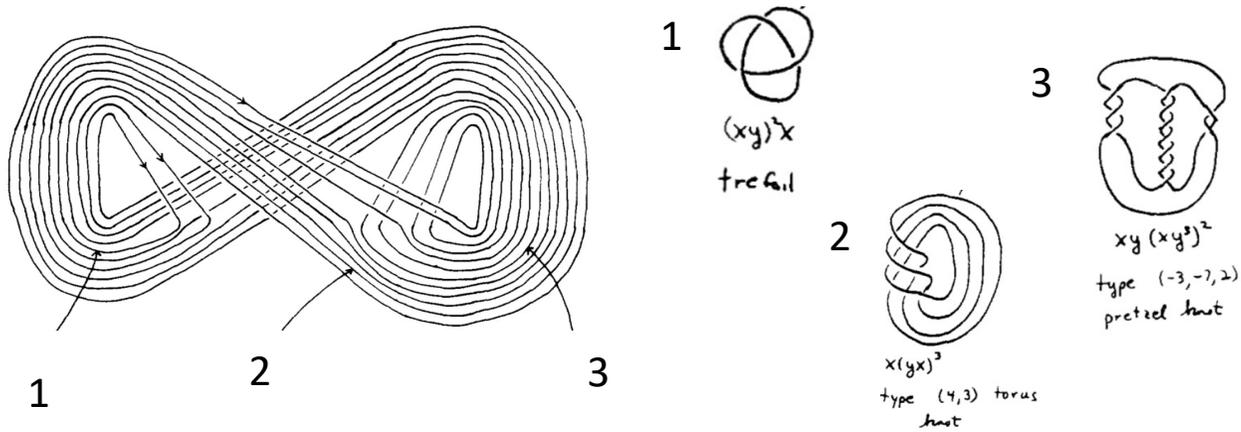
La "recette" pour "pétrir" l'attracteur de Lorenz 63 est une séquence d'étapes de nature topologique.

Gilmore & Lefranc. *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland*. Wiley-Interscience, 2002.

"Tous les systèmes linéaires se ressemblent ; chaque système non linéaire l'est selon sa **topologie**".

II. Comment dévoiler la structure topologique d'un flot 3D ?

- i) Approcher les trajectoires par des courbes fermées.
- ii) Trouver une représentation topologique pour la structure de l'orbite.
- iii) Obtenir une description algébrique de la structure topologique.



- i) Méthode des retours rapprochés.
- ii) Théorie des nœuds - orbite du nœud en trois dimensions.
- iii) Invariants des nœuds - par exemple, polynômes de Conway.

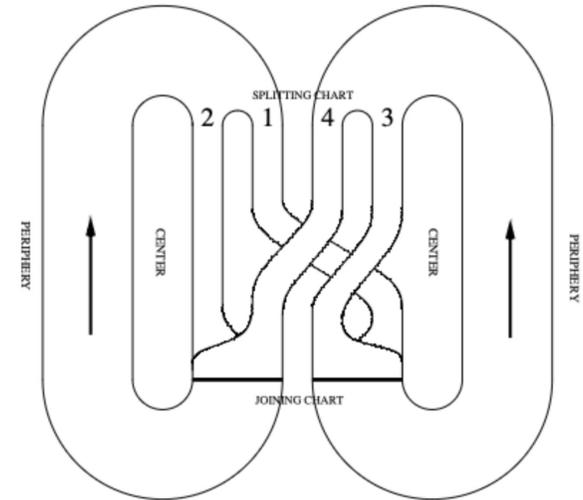
Calcul des invariants topologiques en utilisant des nœuds...



Ensemble de trajectoires 3D



Invariants de nœuds



Les informations sur les nœuds d'un attracteur chaotique peuvent être condensées dans un porte-nœud ou un gabarit.

II. Comment dévoiler la structure topologique d'un flot ?

Quel est le problème avec les gabarits ? Ils sont très difficiles à construire ... ils requièrent la reconstruction d'orbites périodiques instables (UPOs) et, en outre, ils n'ont plus de sens dans un espace des phases à quatre dimensions ou plus, puisqu'ils se dénouent ...

Chapter 7

A braided view of a knotty story

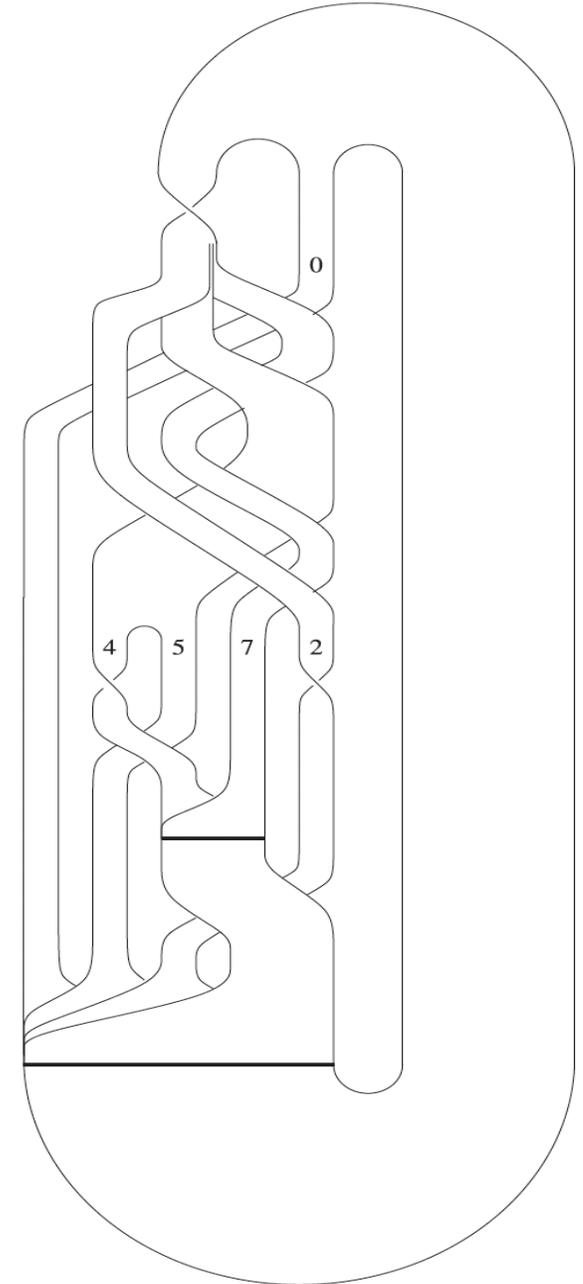
Mario Natiello

*Matematikcentrum-LTH, Lunds Universitet
Box 118, 221 00 Lund, Sverige*

Hernán Solari

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires, Argentina*

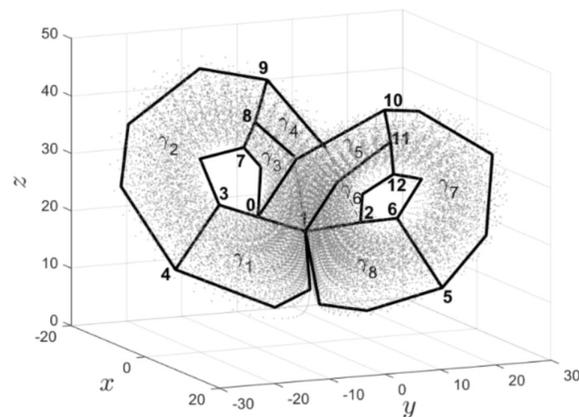
Periodic orbits of 3-d dynamical systems admitting a Poincaré section can be described as braids. This characterisation can be transported to the Poincaré section and Poincaré map, resulting in the braid type. Information from braid types allows to estimate bounds for the topological entropy of the map while revealing detailed orbit information from the original system, such as the orbits that are necessarily present along with the given one(s) and their organisation. We review this characterisation with some examples –from a user-friendly perspective–, focusing on systems whose Poincaré section is homotopic to a disc.



II. Comment dévoiler la structure topologique d'un flot ?

- i) Approximer les points par des d -disques où d est la dimension locale.
- ii) Trouver une représentation topologique pour la variété ramifiée.
- iii) Obtenir une description algébrique de la structure topologique.

BraMAH
COMPLEX
BRAMAH



Groupes
d'homologies

$$H_0 \approx \mathbb{Z}^1;$$

$$H_1 \approx \mathbb{Z}^2;$$

$$H_2 \approx 0$$

- i) Formation de cellules par SVD => les séries temporelles courtes et bruyantes peuvent être traitées.
- ii) Prescription des collages pour assembler les cellules => dimensions plus élevées peuvent être traitées.
- iii) Calcul des homologies => la structure peut être identifiée.

"Chaque système non linéaire déterministe est différent selon son **complexe BraMAH**".

Calcul des invariants topologiques à l'aide des groupes d'homologies



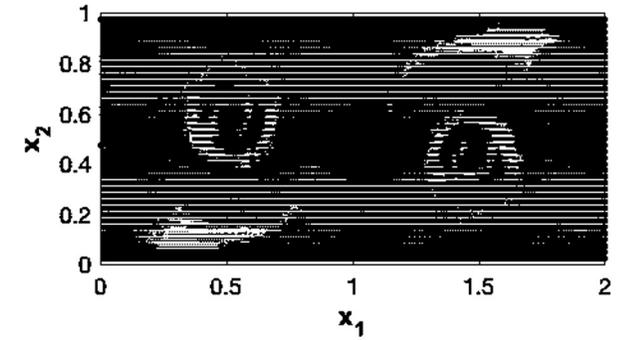
nD nuage des points



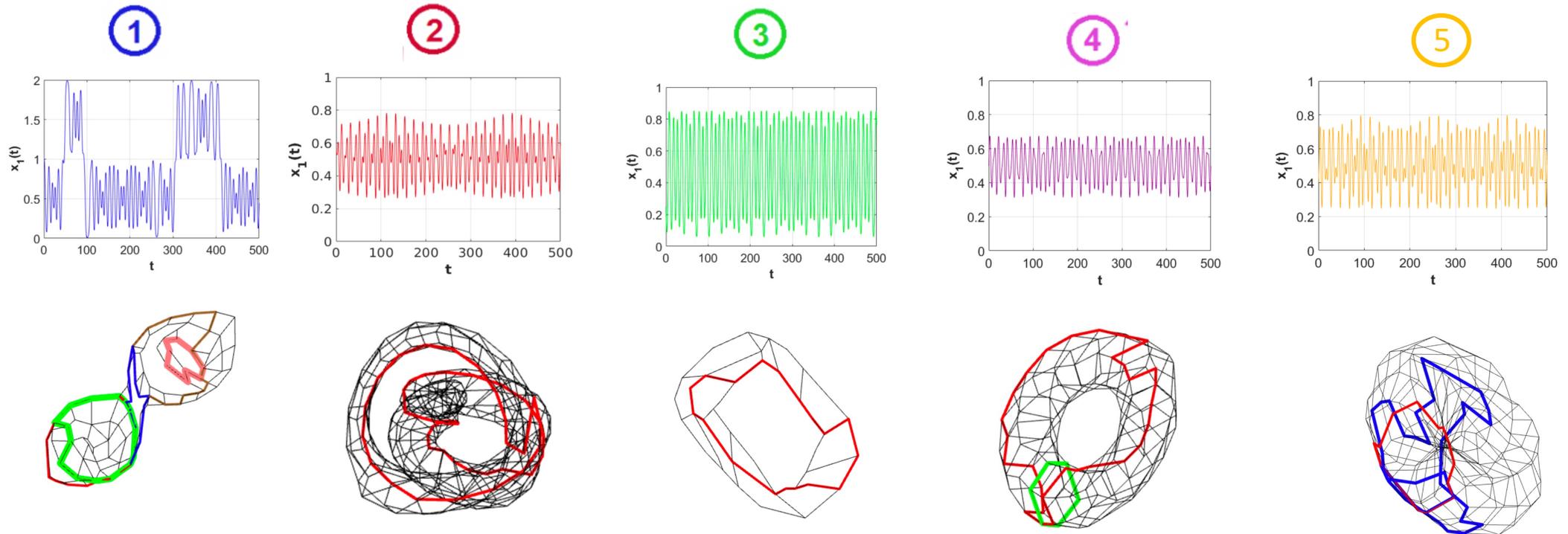
Groupes d'homologies

III. Application de BraMAH à l'analyse lagrangienne

L'analyse lagrangienne est souvent étudiée à l'aide de modèles cinématiques simplifiés, tels que le double tourbillon instable de Shadden, qui simule les configurations océaniques. Kelley et al, 2013 montrent que les structures lagrangiennes cohérentes (LCSs) séparent des régions **dynamiquement distinctes** dans les fluides.



BraMAH révèle l'existence de cinq classes topologiques pour environ 8000 particules.



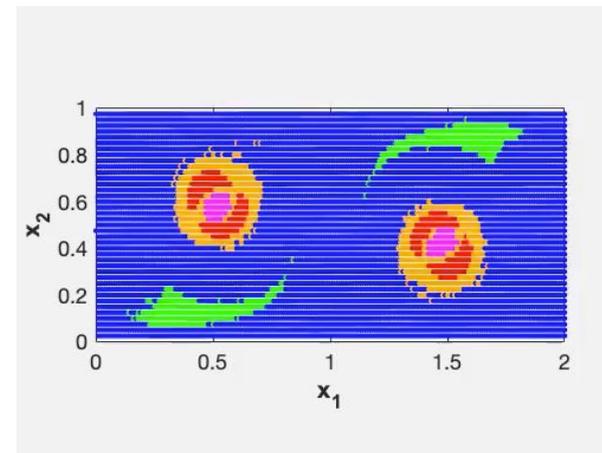
III. Application de BraMAH à l'analyse lagrangienne

En coloriant chaque particule selon sa classe topologique, "chaque région lagrangienne cohérente est différente selon son **complexe BraMAH**".

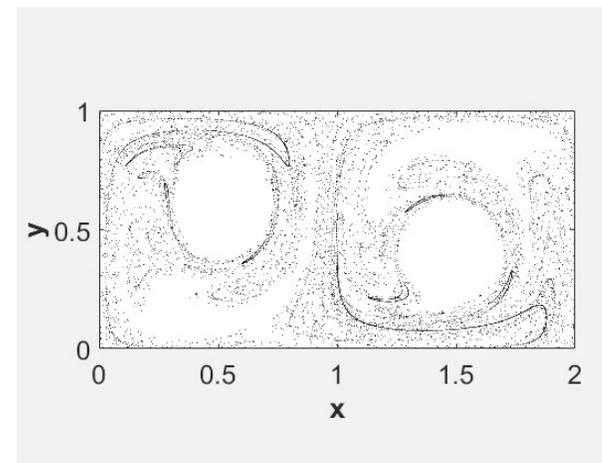
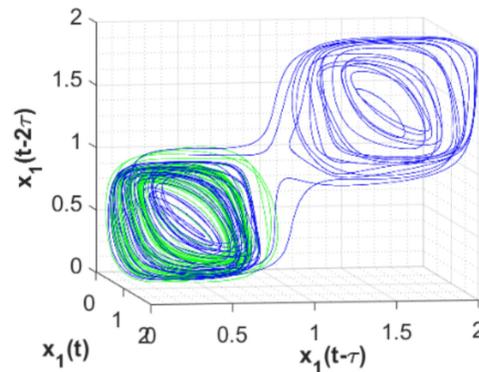
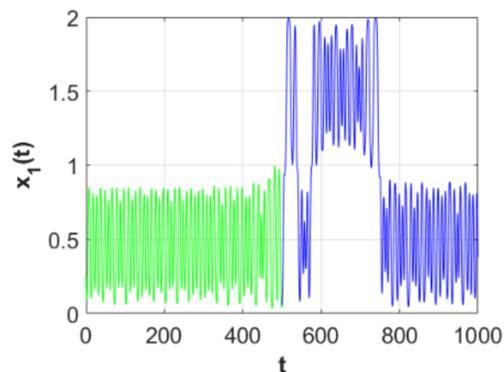
G.D. Charó, G. Artana and D. Sciamarella

Cell complex	β_0	β_1	β_2	\circ	w	Topological class	Colour
\mathbb{K}_4	1	1	0	x	x	I	Green
\mathbb{K}_5	1	2	1	x	x	II	Magenta
\mathbb{K}_6	1	3	0	✓	x	III	Blue
\mathbb{K}_7	1	1	0	✓	✓	IV	Red
\mathbb{K}_8	1	2	1	✓	✓	V	Orange

Table 2. Betti numbers β_k ($k = 0, 1, 2$), orientability chain \circ and weak boundary w for the cell complexes obtained in the BraMAH analysis of the DDG flow example.



Double gyre perturbé : si une particule change de région lagrangienne, elle change de topologie.

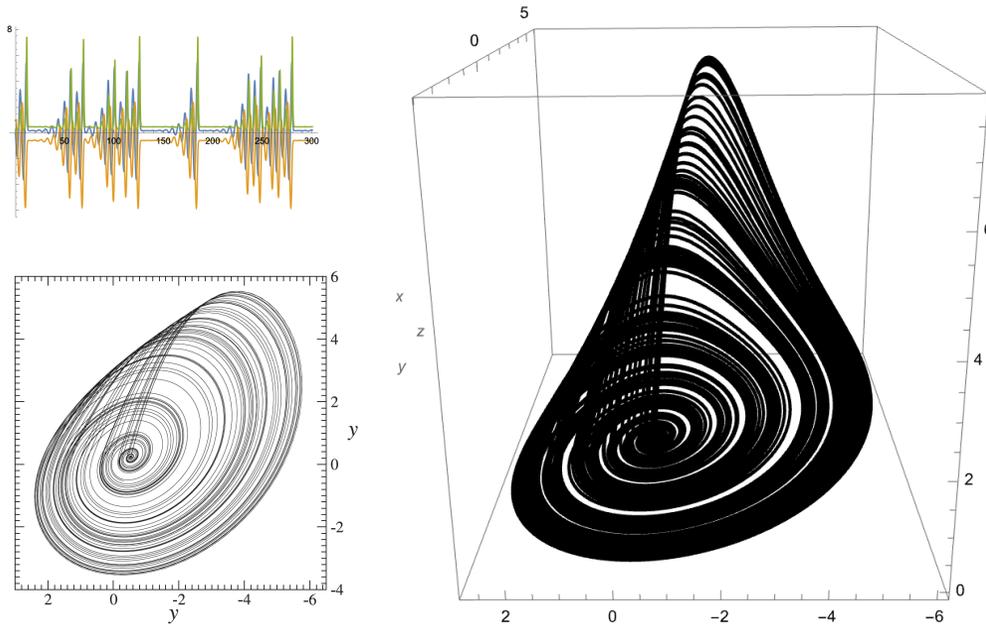


IV. Les homologies sont-elles suffisantes pour dévoiler la structure topologique d'un flot ?

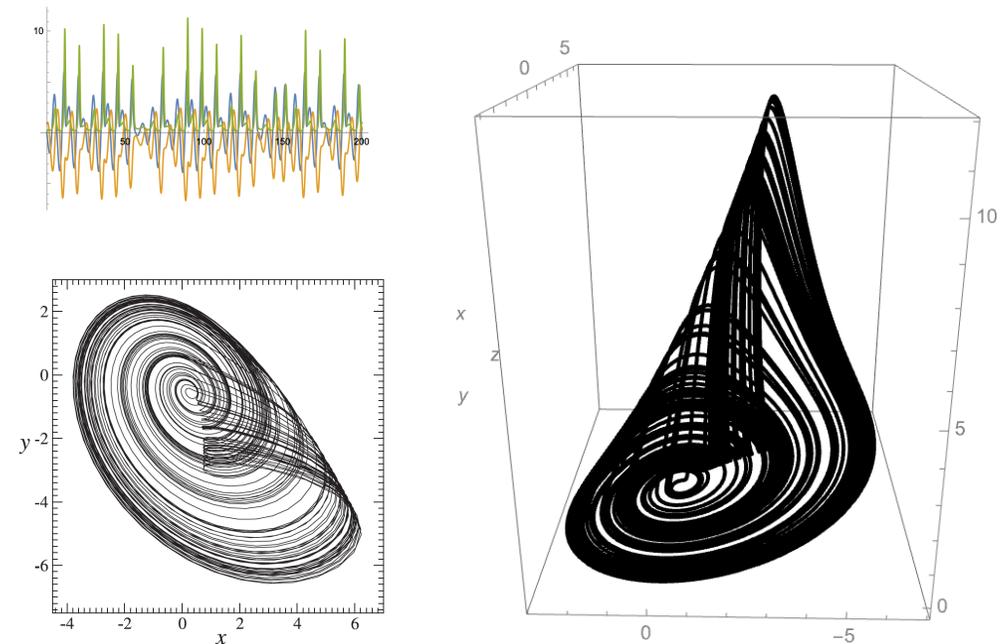
Pas toujours. Par exemple, les homologies ne permettent pas de distinguer deux attracteurs différents produits par le système dynamique de Rössler avec des valeurs de paramètres différentes (l'attracteur spiral de Rössler avec $a = 0,343295$ à gauche et l'attracteur entonnoir de Rössler avec $a = 0,492$ à droite).

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases}$$

Spiral Rössler attractor



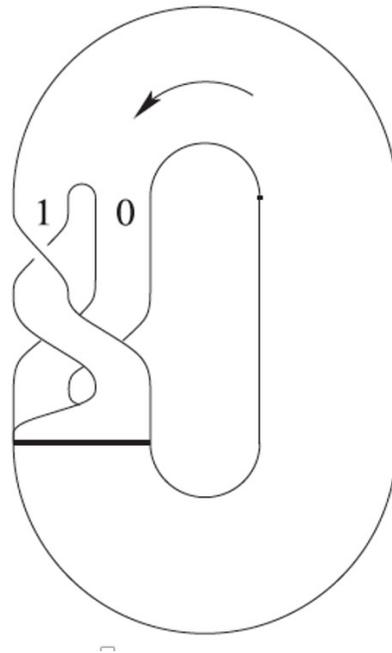
Funnel Rössler attractor



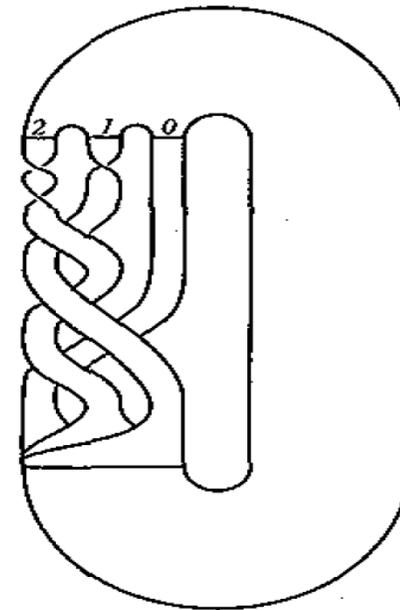
IV. Les homologies sont-elles suffisantes pour dévoiler la structure topologique d'un flot ?

Pourtant, le gabarit ou le porte-nœud fait la distinction entre les deux : l'attracteur de Rössler en spirale a deux bandes (0, 1) tandis que l'attracteur de Rössler en entonnoir a trois bandes (0, 1, 2).

Spiral Rössler attractor



Funnel Rössler attractor



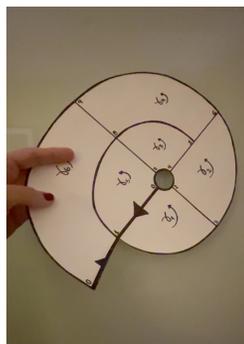
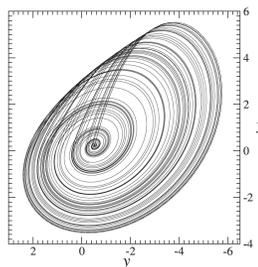
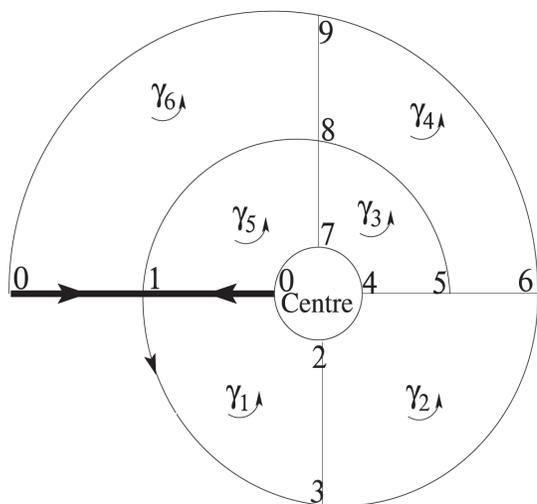
En quoi les gabarits sont-ils plus détaillés que les homologies ?

V. Naissance du tempex

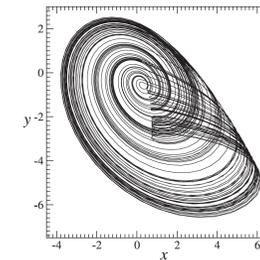
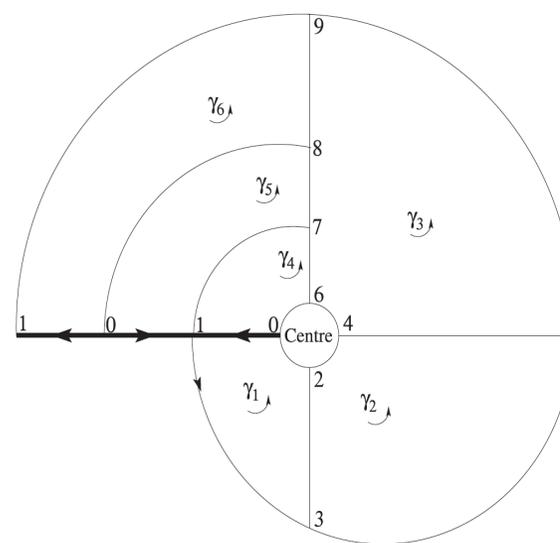
Où se trouvent ces bandes dans un complexe BraMAH ?

Les attracteurs de Rössler en spirale et en entonnoir sont **homologiquement équivalents** : ils ont tous les deux un trou au centre ($H^1 = Z^1$).

Mais il y a plus d'informations dans un complexe BraMAH que celles contenues dans ses groupes d'homologie... par exemple, les **lignes de jonction**. Elles déterminent comment « scotcher » les cellules, et peuvent être détectées en tant que cellules-1 partagées par au moins trois cellules-2 (lignes épaisses).



$$\mathcal{H}_1(K(R)) = [[\langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 7 \rangle + \langle 2, 4 \rangle + \langle 4, 7 \rangle]]$$



$$\mathcal{H}_1(K(R_3)) = [[\langle 0, 2 \rangle - \langle 0, 6 \rangle + \langle 2, 4 \rangle + \langle 4, 6 \rangle]]$$

V. Naissance du tempex

Mais il y a quelque chose de plus qui est très important et qui manque dans un complexe BraMAH pour bien représenter une variété ramifiée d'un système **déterministe**.

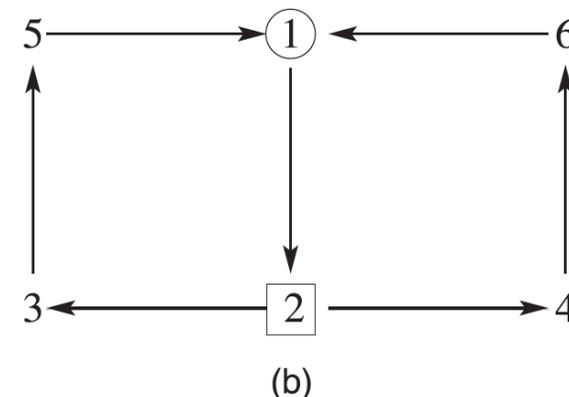
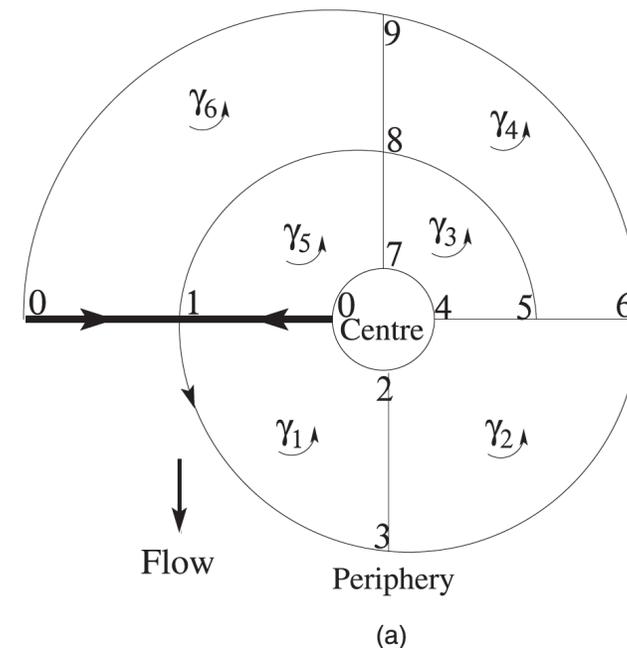
Il s'agit du **flot** ou, en d'autres termes, du **temps** !

Les homologies ne prennent pas en compte l'**action** du flot sur le complexe...

Afin de prendre en compte cette action, nous dotons le complexe BraMAH d'un **graphe dirigé** ("digraph") qui prescrit la direction du flot entre ses cellules de plus haute dimension.

Definition 1. A **tempex** $T \equiv (K, G)$ is made of a complex K of dimension $\dim(K) = \kappa$ and a digraph $G = (N, E)$ whose underlying space is a branched κ -manifold associated with a dynamical system, such that (i) the nodes N are the κ -cells of K and (ii) the edges E are the connections between the κ -cells allowed by the flow.

Dans G , les sommets sont les cellules-2 du complexe K et les arêtes sont les connexions entre cellules-2 compatibles avec le flot.

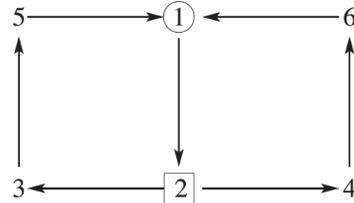
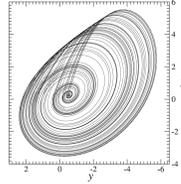
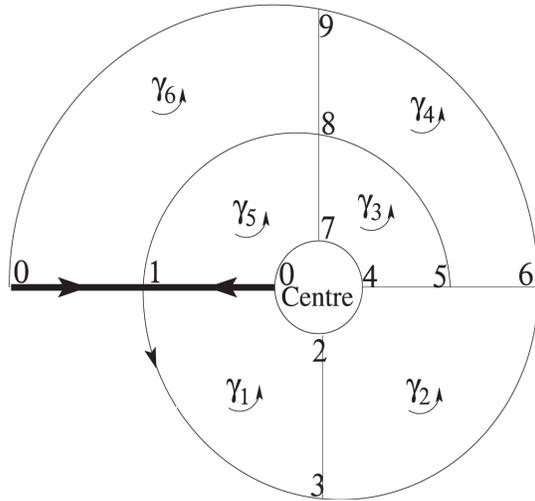


VI. Applications du templex à des systèmes dynamiques déterministes

Template + complex = *Templex* → *stripex* ~ strip in a template

Spiral Rössler attractor

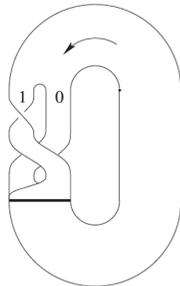
$$T(SR) = (K(SR), G(SR))$$



Stripexes in $T(SR)$:

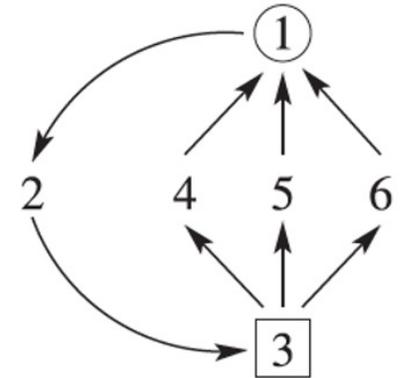
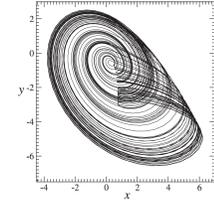
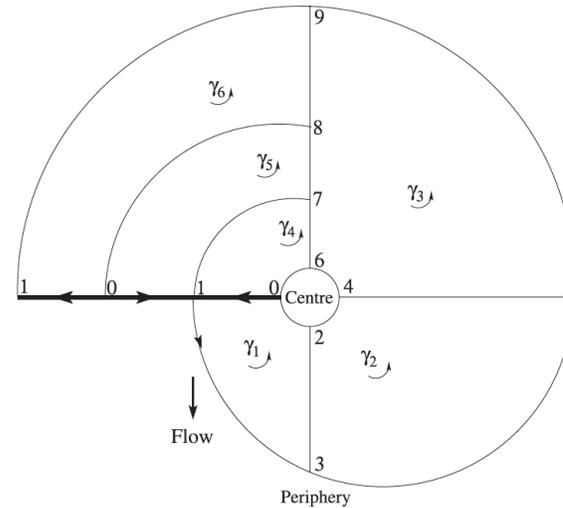
twisted $\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \underline{1}$,

$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \underline{1}$.



Funnel Rössler attractor

$$T(FR) = (K(FR), G(FR))$$

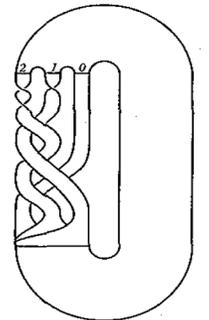


Stripexes in $T(FR)$:

$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \underline{1}$,

twisted $\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \underline{1}$,

$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow \underline{1}$,



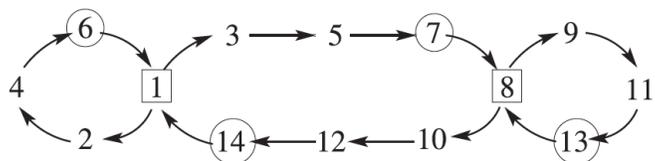
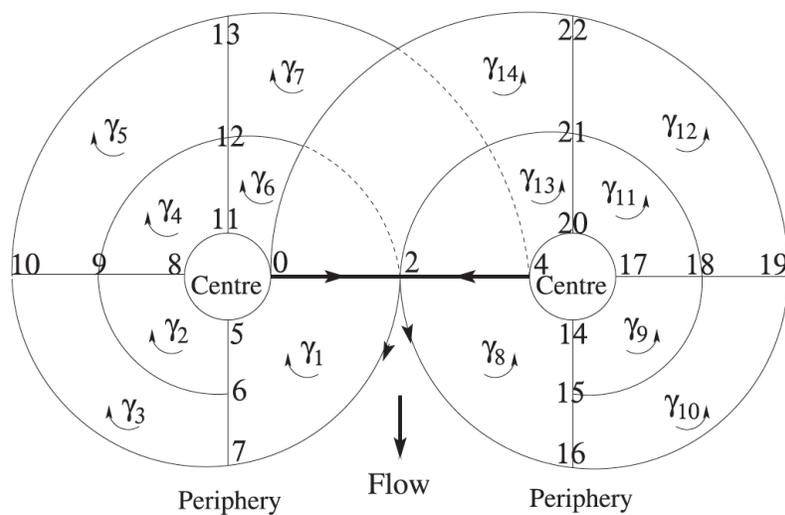
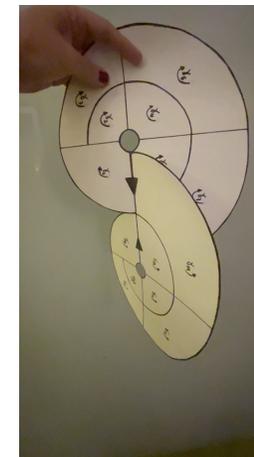
VI. Applications du templex à des systèmes dynamiques déterministes

Un templex pour l'attracteur de Lorenz 63

$$T(L63) = (K(L63), G(L63))$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = Rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases}$$

$$r = 28, s = 10, \text{ and } b = 8/3;$$



$K(L63)$ a deux trous-1.

$T(L63)$ a quatre stripexes dont 2 sont torsadées.

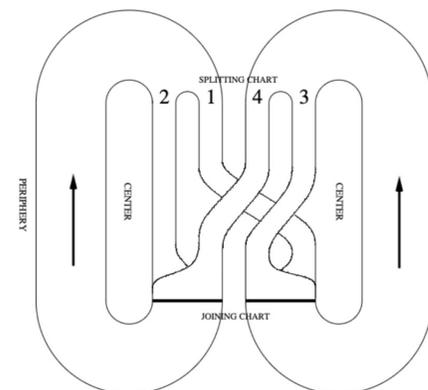
$$c_1 \equiv \underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \underline{1},$$

$$c_2 \equiv \underline{8} \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow \underline{8},$$

$$c_{3_1} \equiv \underline{1} \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \underline{8}$$

$$c_{3_2} \equiv \underline{8} \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \rightarrow \underline{1}.$$

Ceci est cohérent avec le gabarit L63 qui comporte quatre bandes.



<https://git.cima.fcen.uba.ar/sciamarella/templex-properties>

VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

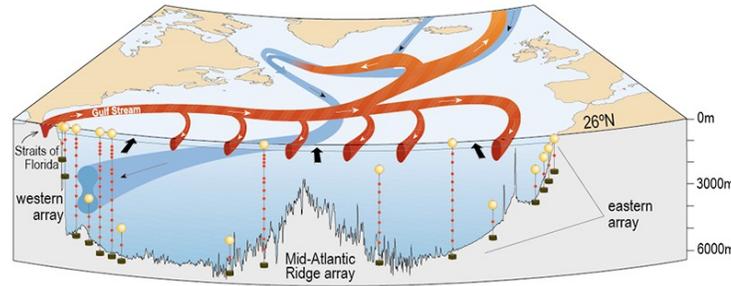
Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

Considérons un modèle autonome 3D de la circulation méridienne de retournement de l'Atlantique (AMOC : Sévellec et Fedorov, *J. Clim.*, 2014) capable de reproduire la dynamique chaotique lors des épisodes glaciaires.

$$d_t \omega = -\lambda \omega - \epsilon \beta S_{NS},$$

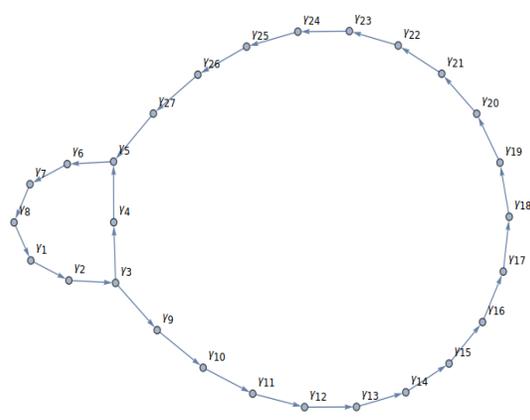
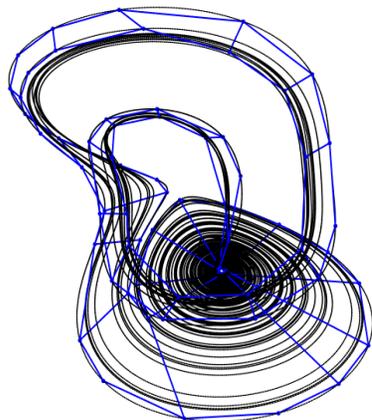
$$d_t S_{BT} = +\Omega S_{NS} - K S_{BT} + F_{BT},$$

$$d_t S_{NS} = -\Omega S_{BT} - K S_{NS} + F_{NS}.$$



Le modèle le plus simple de l'AMOC a les mêmes stripexes que l'attracteur de Rössler en spirale.

$$T(\text{AMOC3D}) = (K(\text{AMOC3D}), G(\text{AMOC3D}))$$



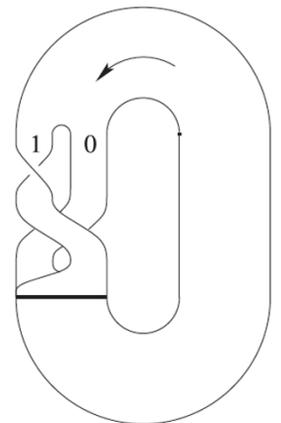
$K(\text{AMOC3D})$ a deux trous-1.

$T(\text{AMOC3D})$ a deux stripexes et l'un d'eux est torsadée.

Stripexes in $T(\text{AMOC3D})$

twisted $\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \underline{1}$,

$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \underline{1}$.



VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

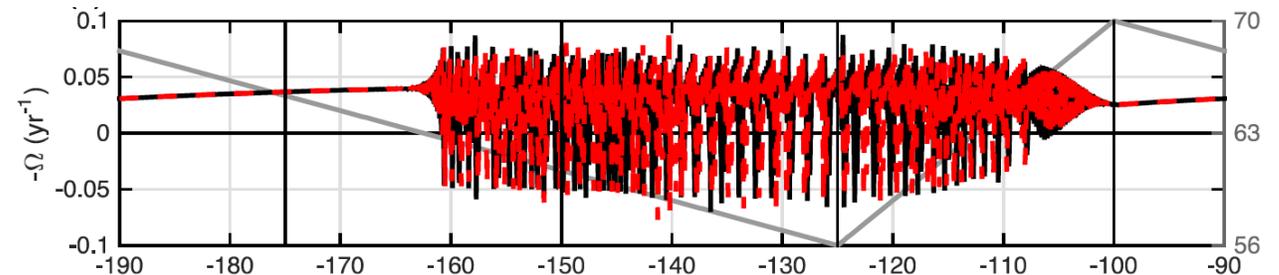
Imposons maintenant les changements temporels de la position de la lisière de la glace de mer (ESI) afin de rendre compte du **comportement chaotique** pendant les glaciations et de la persistance de **conditions océaniques stables** pendant les interglaciaires. F_{BT} et F_{NS} sont des projections de Galerkin du flux de sel de surface. Le modèle 3D devient **non autonome**.

$$d_t \omega = -\lambda \omega - \epsilon \beta S_{NS},$$

$$d_t S_{BT} = +\Omega S_{NS} - K S_{BT} + F_{BT},$$

$$d_t S_{NS} = -\Omega S_{BT} - K S_{NS} + F_{NS},$$

$$\text{where } F_{BT} + iF_{NS} = \frac{S_0}{2\pi h} \int_0^{2\pi} F e^{-i\theta} d\theta.$$



La figure montre les **variations simulées du taux de renversement** ($-\Omega$) pour deux ensembles légèrement différents de conditions initiales (lignes noires pleines et pointillés rouges) au cours d'un cycle glaciaire-interglaciaire.

La ligne grise en dents de scie représente le forçage dépendant du temps introduit par la position de la lisière de la glace de mer (ESI).

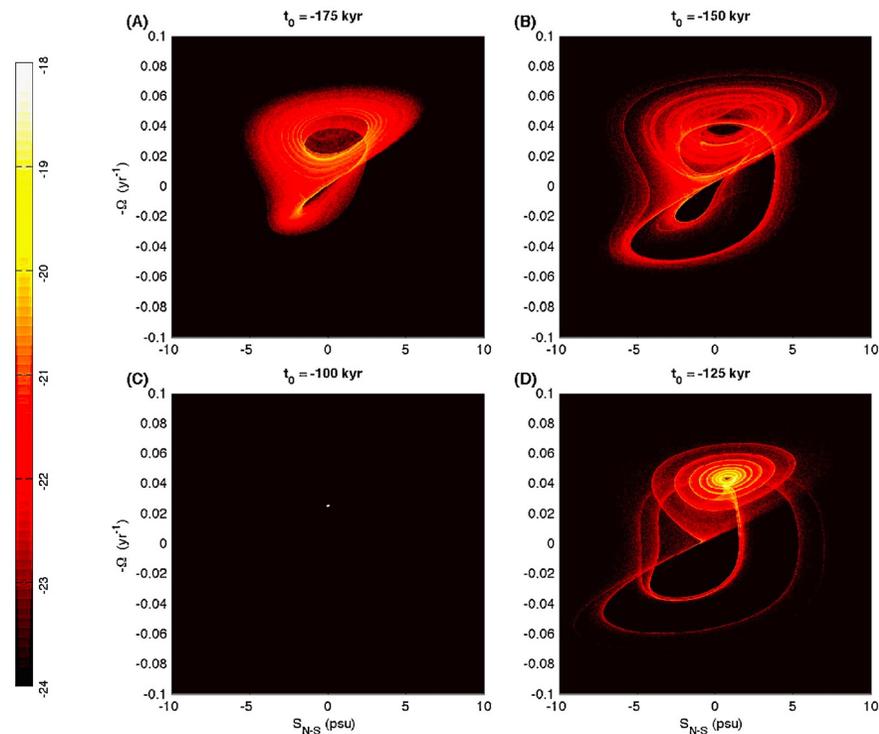
Les quatre lignes verticales indiquent les temps (t_0) utilisés ultérieurement pour calculer l'**attracteur pullback (PBA)** [Ghil et al, 2008 ; Chekroun et al, 2011].

VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

PBA du modèle AMOC instable : la séquence couvre toute la durée d'un cycle **glaciaire-interglaciaire**. Les couleurs représentent la fonction de densité de probabilité pour les positions du système dans l'espace des phases à la fin de l'intégration.

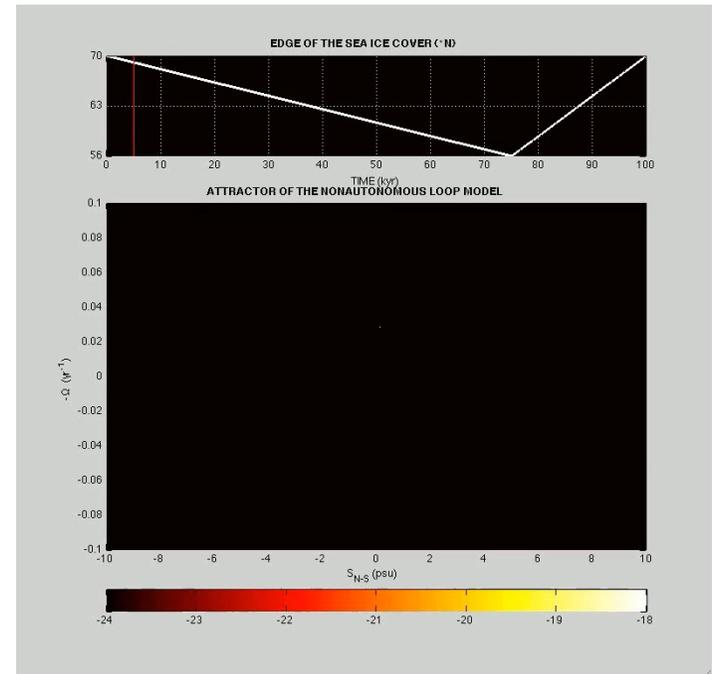


Unstable AMOC during glacial intervals and millennial variability: The role of mean sea ice extent



Florian Sévellec^{a,*}, Alexey V. Fedorov^b

^a Ocean and Earth Science, National Oceanography Centre Southampton, University of Southampton, Southampton, UK
^b Department of Geology and Geophysics, Yale University, New Haven, CT, USA



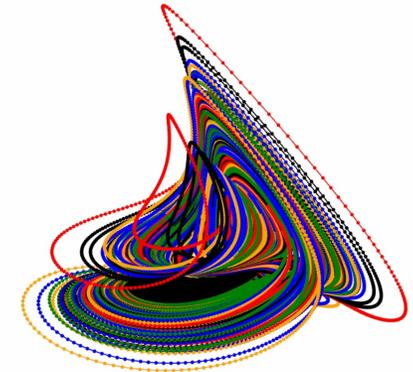
VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

Solutions du Modèle 4D: nous obtenons un nuage de points 4D. Le **complexe BraMAH** pour ce nuage de points peut être utilisé pour construire un tempex & pour analyser la structure topologique du système instable.

-1.204390949016654645e-02	-3.755666436397816499e-01	1.306518394821738482e+00	1.348398174857631283e-02
-1.224216393305090946e-02	-4.105094258159222020e-01	1.302943763424306400e+00	1.348421537371332669e-02
-1.243740567030636977e-02	-4.455459503156868895e-01	1.297985263600033523e+00	1.348444899293549729e-02
-1.262932547193569219e-02	-4.806182011675594890e-01	1.291628288655764401e+00	1.348468260624273440e-02
-1.281761394464031763e-02	-5.156665152828940890e-01	1.283860898299330700e+00	1.348491621363492356e-02
-1.300196222019738522e-02	-5.506297133049842252e-01	1.274673984047107300e+00	1.348514981511196587e-02
-1.318206265102916247e-02	-5.854452473115573374e-01	1.264061403415025930e+00	1.348538341067376072e-02
-1.335760953344140682e-02	-6.200493585640195482e-01	1.252020112163938492e+00	1.348561700032020402e-02
-1.352829982505172543e-02	-6.543772419896768389e-01	1.238550270411638454e+00	1.348585058405119691e-02
-1.369383396027380913e-02	-6.883632413582051468e-01	1.223655375731521167e+00	1.348608416186663009e-02
-1.385391662238839167e-02	-7.219410390573020031e-01	1.207342364900948040e+00	1.348631773376640641e-02
-1.400825754992730994e-02	-7.550438634653665604e-01	1.189621705883329605e+00	1.348655129975042180e-02
-1.415657236815926791e-02	-7.876047132207103507e-01	1.170507470205472522e+00	1.348678485981857564e-02
-1.429858339870929487e-02	-8.195565760147025536e-01	1.150017391270899081e+00	1.348701841397076037e-02
-1.443402050473086007e-02	-8.508326700754310634e-01	1.128172909629967080e+00	1.348725196220687365e-02
-1.456262192774995280e-02	-8.813666883084957382e-01	1.104999200382378088e+00	1.348748550452682354e-02
-1.468413509473222647e-02	-9.110930350798221999e-01	1.080525186846978958e+00	1.348771904093049555e-02
-1.479831746114401020e-02	-9.399470891449953625e-01	1.054783525091836704e+00	1.348795257141779599e-02
-1.490493731082714705e-02	-9.678654534644385299e-01	1.027810576471543280e+00	1.348818609598861386e-02
-1.500377453792354869e-02	-9.947862054894188732e-01	9.996463597398603795e-01	1.348841961464285373e-02
-1.509462142964136840e-02	-1.020649159083170110e+00	9.703344758810172888e-01	1.348865312738041326e-02
-1.517728339478972496e-02	-1.045396106763873956e+00	9.399220267897770986e-01	1.348888663420118143e-02
-1.525157967480668918e-02	-1.068971066939994996e+00	9.084595025506267962e-01	1.348912013510506283e-02
-1.531734402118566096e-02	-1.091320526419735426e+00	8.760006462164051655e-01	1.348935363009195684e-02
-1.537442532355817737e-02	-1.112393665222866090e+00	8.426023160366005182e-01	1.348958711916175765e-02
-1.542268819799532883e-02	-1.132142579929327209e+00	8.083243076167658803e-01	1.348982060231436464e-02

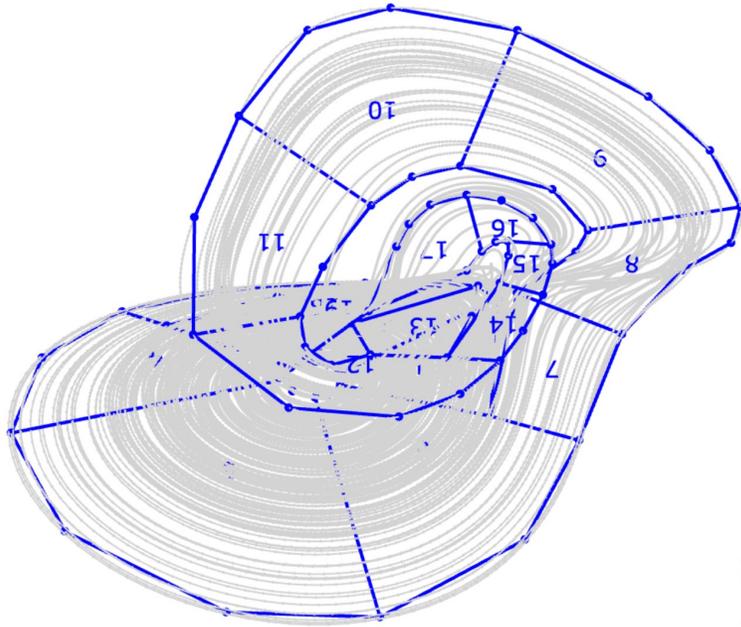


VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

$$T(\text{AMOC4D}) = (K(\text{AMOC4D}), G(\text{AMOC4D}))$$



$K(\text{AMOC4D})$ a des cellules-3
(base: tore solide)

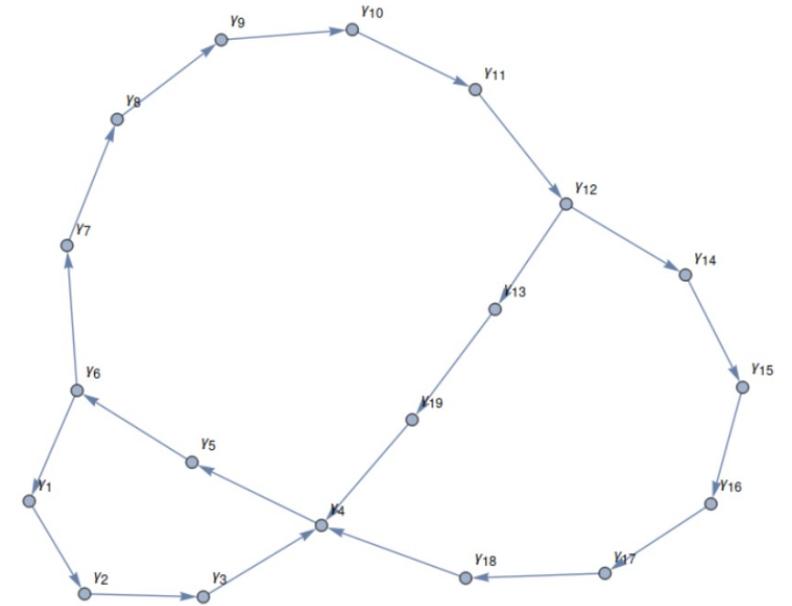
Trois trous-1 dans le
complexe BraMAH

3 stripexes
(1 torsadé)

$$c_1 \equiv \underline{4} \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \underline{3}$$

$$c_2 \equiv \underline{4} \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow \underline{19}$$

$$c_3 \equiv \underline{4} \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow \underline{18}$$



Quelle est la relation entre le tempex et la PBA ?

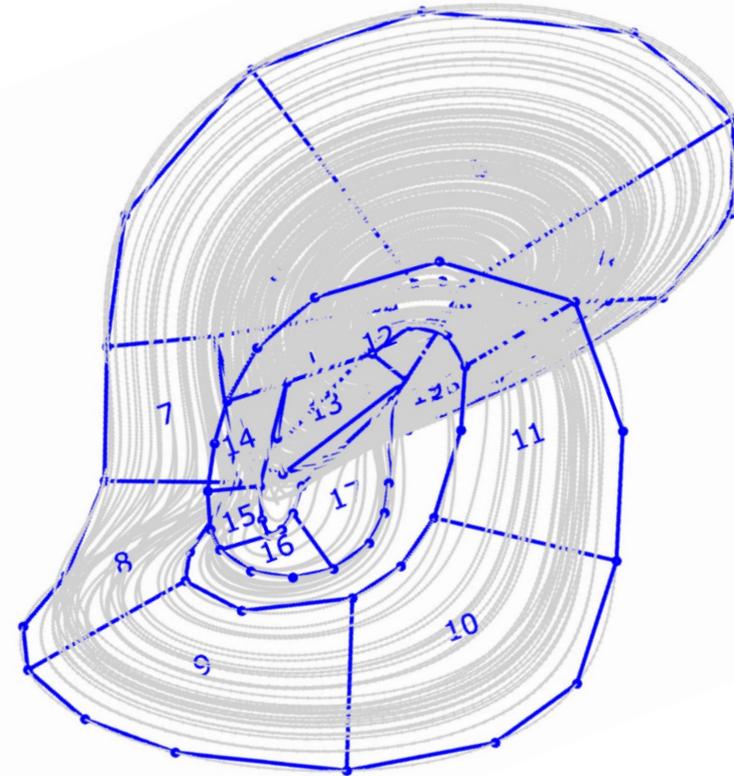
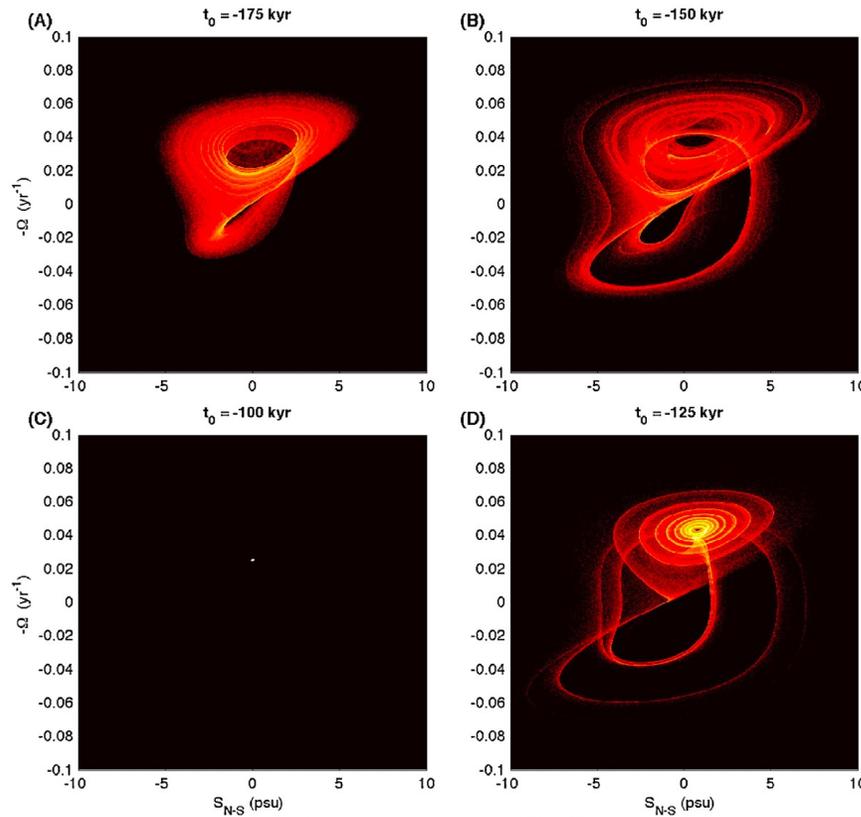
VI. Applications du tempnex à des systèmes dynamiques déterministes

Un **tempnex** pour un modèle simplifié de Sévellec et al. pour l'AMOC

Travail en cours avec C. Mosto et J. Ruiz (IFAECI) en collaboration avec F. Sévellec et al. (Brest)

PBA AMOC non autonome

AMOC4D autonomisé : $T(\text{AMOC4D})$



Le **tempnex** peut être considéré comme **un seul objet statique de dimension supérieure** qui combine toutes les "parties" de la structure que la séquence d'instantanés éclaire partiellement, en fonction de (t_0, t) .

Travailler en dimensions supérieures est une **alternative à l'utilisation d'attracteurs pullback**.

VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques stochastiques

Comment décrire la topologie d'un attracteur **aléatoire** qui change dans le temps ?

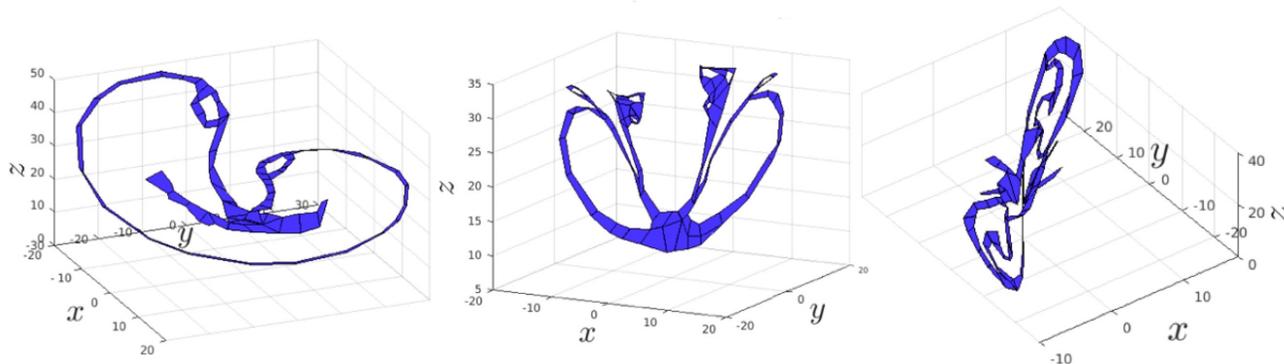
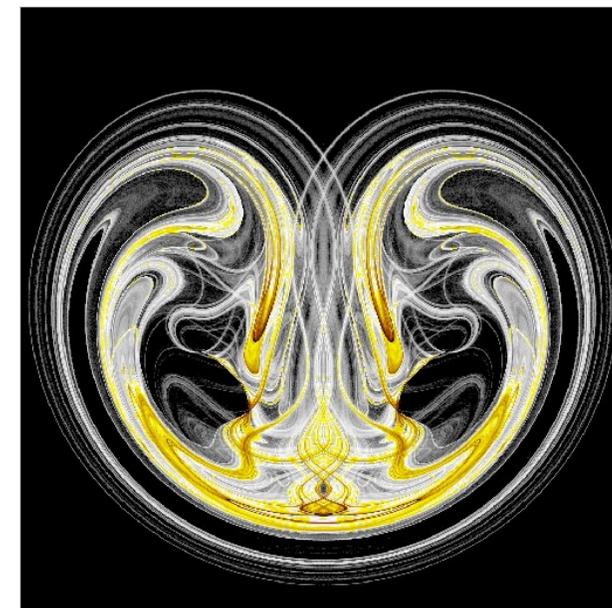
La caractérisation topologique du chaos affecté par le bruit est une question cruciale pour la compréhension des systèmes complexes, où une partie de la **dynamique** reste **non résolue**. Cette partie est souvent modélisée comme du **bruit**.

Alors que le bruit additif dans un système d'équations brouille la structure topologique, le bruit multiplicatif peut la changer radicalement [Chekroun et al, Physica D, 2011].

Charó et al [Chaos, 2021] ont étendu le concept de tempex pour rendre compte de l'évolution de la mesure invariante d'un système chaotique bruité d'un instant au suivant.

Il y a un complexe BraMAH par instantané. Mais qu'en est-il du **flot** chez LORA ?

LOrenz Random Attractor (**LORA**)



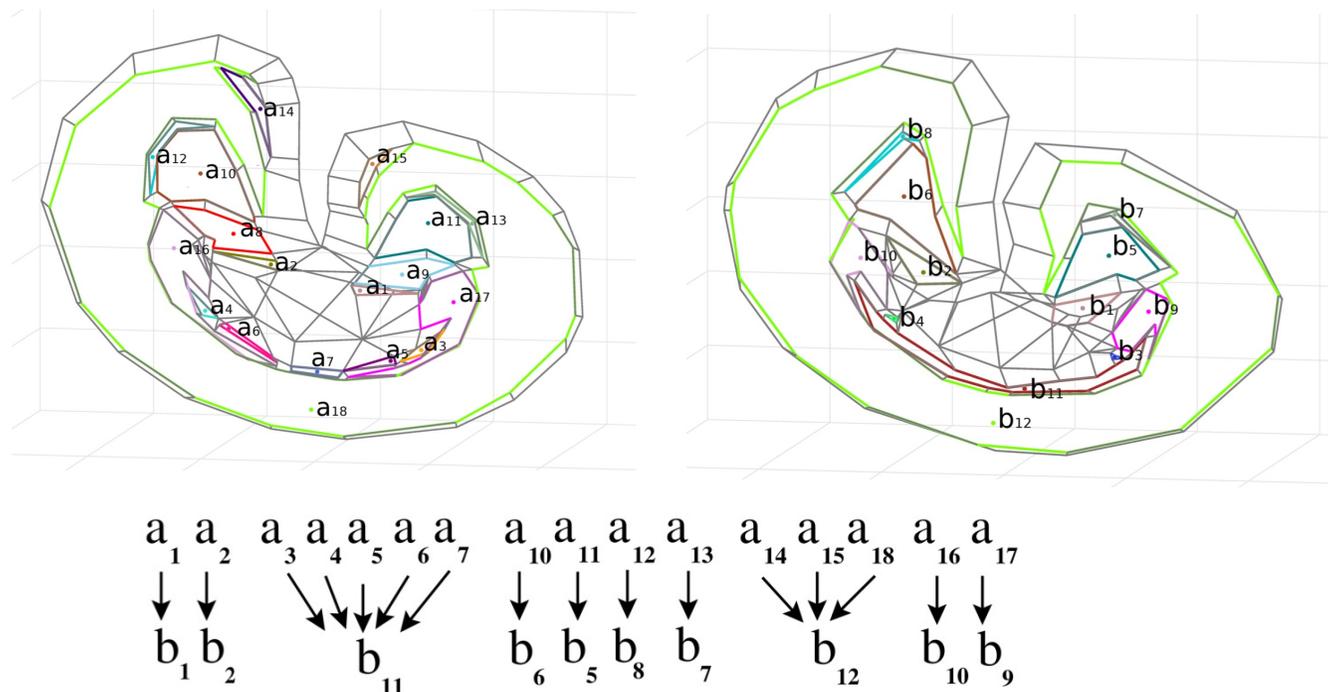
$$\begin{aligned}
 dx &= s(y - x)dt + \sigma x dW_t, \\
 dy &= (rx - y - xz)dt + \sigma y dW_t, \\
 dz &= (-bz + xy)dt + \sigma z dW_t.
 \end{aligned}$$

$r = 28, s = 10, \text{ and } b = 8/3;$

VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques stochastiques

Comment décrire la topologie d'un attracteur **aléatoire** qui change dans le temps ?

Dans ce cas, le flot ne relie pas les cellules d'un même complexe, mais les trous (c-à-d. les générateurs de groupes d'homologie) entre différents instantanés.



Les trous conservent leur identité sur des intervalles de temps, mais ils subissent –à des points dans le temps–, des fusions, des scissions, voire des créations ou des destructions.

Pour un attracteur **aléatoire**, nous pouvons créer un **digraphe reliant les trous** des complexes successifs.

VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques stochastiques

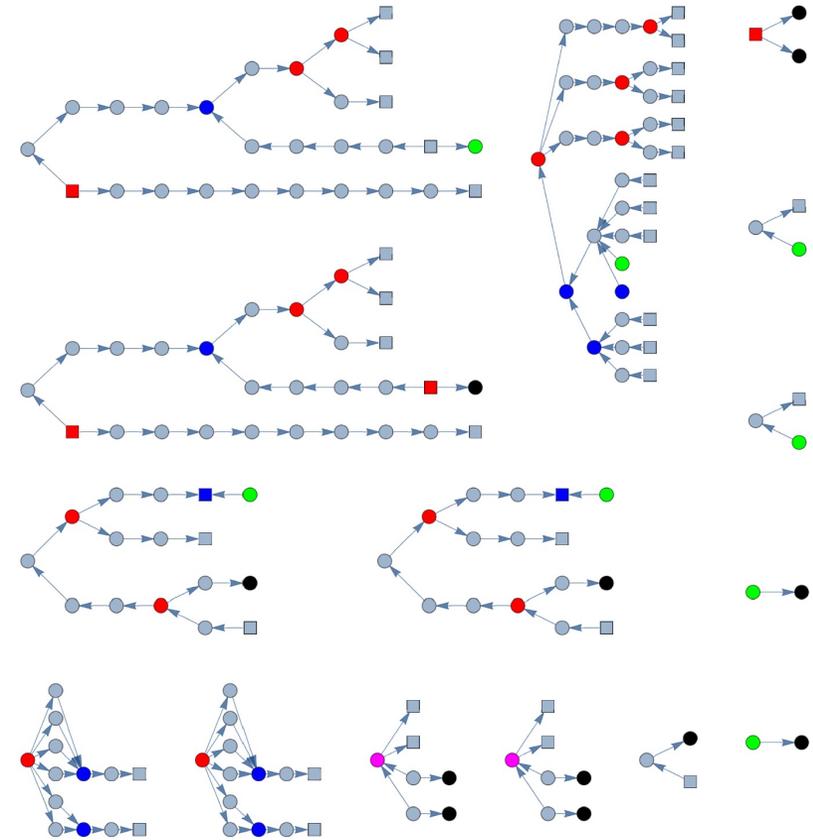
Comment décrire la topologie d'un attracteur **aléatoire** qui change dans le temps ?

Un **tempex aléatoire** $R = (K, D)$ est une famille indexée K de complexes complétée par un digraphe D .

Le digraphe D du système LORA comporte 15 composantes connexes : chacune d'entre elles raconte l'histoire d'un ou plusieurs trous.

Les points de basculement topologiques (**topological tipping points, TTP**) peuvent être identifiés et classés à l'aide du digraphe.

Ils sont mis en évidence par des couleurs différentes selon le type d'événement : **création** en vert, **destruction** en noir, **scission** en rouge, **fusion** en bleu et **fusion suivie immédiatement d'une scission** en magenta.

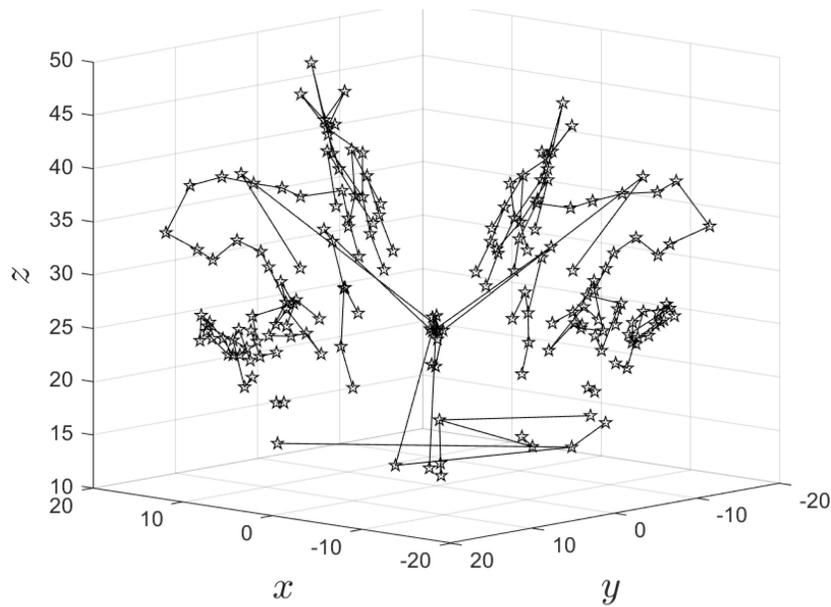


VI. Applications du tempex à des systèmes dynamiques stochastiques

Comment décrire la topologie d'un attracteur **aléatoire** qui change dans le temps ?

On peut obtenir une meilleure représentation de la façon dont les trous évoluent dans l'espace des phases du système en utilisant les coordonnées des barycentres des trous qui sont les sommets du digraphe.

Nous appelons cette structure une **constellation**. Remarquez qu'elle est liée à une certaine fenêtre temporelle et à un certain pas de temps dans la vie d'un attracteur aléatoire.



Perspectives

Peut-on doter une constellation d'un métacomplexe ?

Pouvons-nous obtenir des stripexes qui évoluent dans le temps et définir les **points de bascule topologiques** d'un système dynamique stochastique en termes de variations de la structure des stripexes ?

"Tous les systèmes linéaires se ressemblent ; chaque système non linéaire l'est selon son **templex**".

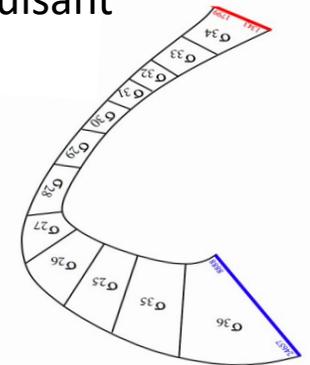
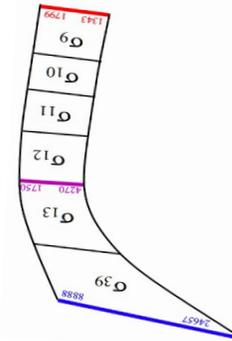
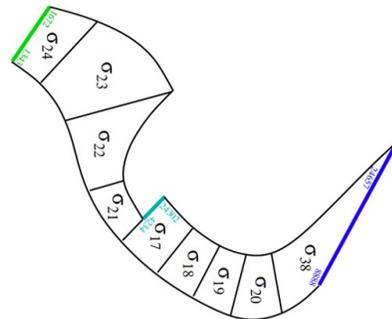
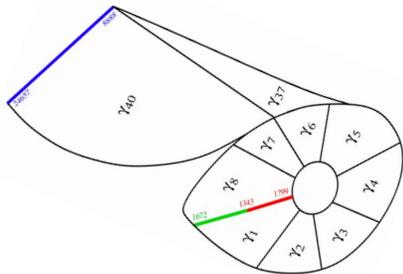
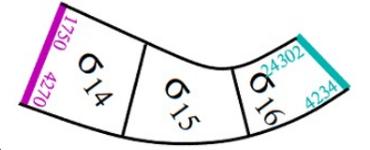
Le templex permet de comprendre les flots déterministes en termes de mécanismes fondamentaux.

Nous avons montré comment construire un templex pour un modèle déterministe autonome ainsi que, pour un cas non autonome, en passant à des dimensions supérieures.

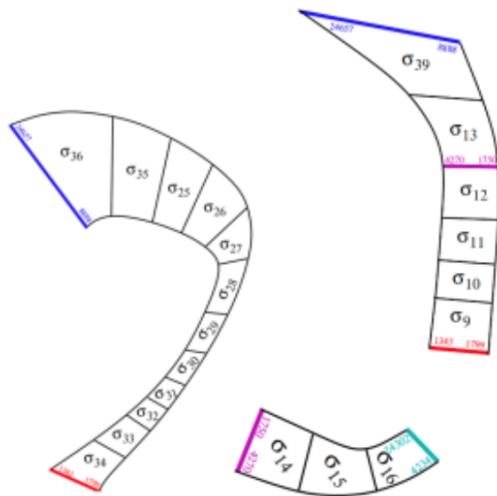
Nous avons également montré comment étendre ces concepts à un attracteur aléatoire dont la topologie change dans le temps.

Buts : utiliser l'approche Templex pour

- a) déterminer si deux dynamiques sont équivalentes ou si un modèle particulier est une représentation adéquate de la dynamique sous-jacente à une série temporelle observée ou simulée numériquement ;
- b) sélectionner les modèles réduits appropriés qui capturent la bonne dynamique produisant les données.



- Barreal, A., Charó, G. D., Roca, P. D. & Sciamarella, D. (2023, in preparation). Computing a templex from numerical solutions of a chaotic dynamical system.
- Charó, G. D., Sciamarella, D., Mangiarotti, S., Artana, G., & Letellier, C. (2019) Observability of laminar bidimensional fluid flows seen as autonomous chaotic systems. *Chaos*, 29(12), 123126.
- Charó, G. D., Artana, G., & Sciamarella, D. (2020) Topology of dynamical reconstructions from Lagrangian data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 405, 132371.
- Charó, G. D., Artana, G., & Sciamarella, D. (2021a) Topological colouring of fluid particles unravels finite-time coherent sets. *Journal of Fluid Mechanics*, 923.
- Charó, G. D., Chekroun, M. D., Sciamarella, D., & Ghil, M. (2021b). Noise-driven topological changes in chaotic dynamics. *Chaos*, 31(10), 103115
- Charó, G. D., Letellier, C., & Sciamarella, D. (2022a) Templex: A bridge between homologies and templates for chaotic attractors. *Chaos*, 32(8), 083108
- Charó, G. D., Ghil, M., & Sciamarella, D. (2023) Random templex encodes topological tipping points in noise-driven chaotic dynamics, *Chaos*, accepted, 2023
- Chekroun, M. D., Simonnet, E., & Ghil, M. (2011). Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(21), 1685-1700
- Ghil, M., Chekroun, M. D., & Simonnet, E. (2008) Climate dynamics and fluid mechanics: Natural variability and related uncertainties, *Physica D*, 237, 2111–2126,
- Ghil, M., & Lucarini, V. (2020) The physics of climate variability and climate change. *Reviews of Modern Physics*, 92(3), 035002
- Ghil, M. and Sciamarella, D. (2023) Review Article: Dynamical Systems, Algebraic Topology, and the Climate Sciences, *EGU sphere* [preprint], *Nonlinear Processes in Geophysics*, in press.
- Gilmore, R. (1998). Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4), 1455.
- Kelley, D. H., Allshouse, M. R., & Ouellette, N. T. (2013) Lagrangian coherent structures separate dynamically distinct regions in fluid flows. *Physical Review E*, 88(1), 013017.
- Letellier, C., Stankevich, N. & Rössler, O. E. (2022) Dynamical Taxonomy: some taxonomic ranks to systematically classify every chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 32 (2), 2230004.
- Sciamarella, D., & Mindlin, G. B. (1999) Topological structure of chaotic flows from human speech data. *Physical review letters*, 82(7), 1450.
- Sciamarella, D., & Mindlin, G. B. (2001) Unveiling the topological structure of chaotic flows from data. *Physical review E*, 64(3), 036209.
- Sévellec, F., & Fedorov, A. V. (2015). Unstable AMOC during glacial intervals and millennial variability: The role of mean sea ice extent. *Earth and Planetary Science Letters*, 429, 60-68.
- Sévellec, F., & Fedorov, A. V. (2014). Millennial variability in an idealized ocean model: predicting the AMOC regime shifts. *Journal of Climate*, 27(10), 3551-3564.
- Van Sebille, Erik, et al (2018) Lagrangian ocean analysis: Fundamentals and practices. *Ocean Modelling* 121, 49-75.



Accueil > Actualités

Templex : une nouvelle mathématique pour comprendre le chaos

11 octobre 2022

RÉSULTAT SCIENTIFIQUE OCÉAN ATMOSPHÈRE

"Tous les systèmes linéaires se ressemblent ; chaque système non linéaire l'est selon son **templex**".

<https://www.insu.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/templex-une-nouvelle-mathematique-pour-comprendre-le-chaos>



denisse.sciamarella@cnrs.fr